نام درس: ریاضیات مهندسی
تعداد سؤالات: تستی: ۲۰ **تشریحی:** ۵

رشته تحصیلی/ کُد درس: مهندسی کامپیوتر (۱۱۱۱۰۹۵)
زمان آزمون (دقیقه): تستی: ۶۰ **تشریحی:** ۶۰

کُد سری سؤال: یک (۱) **استفاده از:** -- **مجاز است.**

امام خمینی (ره): این محرم و صفر است که اسلام را زنده نگه داشته است.

۱. جواب‌های معادله‌ی $z^3 - 1 = 0$ کدام است؟

الف. $1, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

ب. $1, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

ج. $1, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

د. $1, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

۲. عدد $(1 + i\sqrt{3})^{-10}$ برابر است با :

الف. $\frac{1}{2^{10}}(-1 + \sqrt{3}i)$

ب. $\frac{1}{2^{11}}(-1 + \sqrt{3}i)$

ج. $\frac{1}{2^{11}}(1 - \sqrt{3}i)$

د. $\frac{1}{2^{10}}(1 - \sqrt{3}i)$

۳. معادله‌ی $\left|\frac{z+i}{z-i}\right| = 1$ نشان دهنده‌ی چه شکلی در صفحه‌ی مختلط است؟

الف. خط راست ب. دایره ج. بیضی د. هذلولی

٤. تابع $u = 3x^2y + 2x^2 - y^3 - 2y^2$ یک تابع همساز است . تابع مزدوج همساز آن کدام است؟

الف. $V = 3x^2y^2 + 4xy - 2x^3 + c$

ب. $V = 3xy^2 + 4xy - x^4 + c$

ج. $V = 4xy^2 + 3xy + x^3 + c$

د. $V = 3xy^2 + 4xy - x^3 + c$

۵. کدام یک از توابع زیر تام است؟

الف. $f(z) = \frac{1}{z}$ ب. $f(z) = z^4$ ج. $f(z) = \operatorname{Re} z$ د. $f(z) = |z|^2$

٦. کدام رابطه درست است؟

الف. $\sinh z = -\sin iz$

ب. $\cosh z = -i\cos iz$

ج. $\cosh z = i\cos iz$

د. $\sinh z = -i\sin iz$

۷. دوره تناوب تابع $\sinh z$ برابر است با:

الف. 2π ب. $2k\pi$ ج. $2\pi i$ د. πi

۸. مقدار اصلی i^i کدام است؟

الف. $\exp(-\frac{\pi}{2})$ ب. $\exp(\frac{\pi}{2})$ ج. $-\exp(\frac{\pi}{2})$ د. $-\exp(-\frac{\pi}{2})$

۹. تصویر نقاط داخل دایره‌ی $|z|=1$ تحت تبدیل $w=\frac{1}{z}$ کدام است؟

الف. نقاط واقع در نیم صفحه‌ی راست
ب. نقاط واقع در بیرون دایره‌ی $|z|=1$
ج. نقاط واقع در نیم صفحه‌ی فوقانی
د. نقاط واقع روی خط $y=0$

۱۰. انتگرال $\int_c f(z)dz$ وقتی $c, f(z)=x^2+iy^3$ سهمی $y=x^2$ از مرکز مختصات تا نقطه‌ی $A(1,1)$ می‌باشد برابر است با:

الف. $\frac{9}{14}+i\frac{1}{12}$
ب. $\frac{1}{14}+i\frac{9}{13}$
ج. $\frac{9}{14}+i\frac{1}{13}$
د. $\frac{9}{13}+i\frac{1}{14}$

۱۱. حاصل $\oint_c \frac{\cosh z}{z^2-2z}dz$ که در آن c مرز دایره‌ی $|z|=1$ می‌باشد، کدام است؟

الف. πi
ب. $-\pi i$
ج. $2\pi i$
د. $-2\pi i$

۱۲. حاصل انتگرال $\oint_c \frac{e^z}{\cos z}dz$ ، که در آن c دایره‌ی $|z|=1$ می‌باشد، کدام است؟

الف. πi
ب. $2\pi i$
ج. صفر
د. $-2\pi i$

۱۳. حاصل انتگرال $\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{\sqrt{2}-\cos\theta}$ برابر است با:

الف. $\frac{1}{4}$
ب. $-\frac{1}{2}$
ج. 2π
د. ۱

۱۴. ضریب $\frac{1}{z-1}$ در بسط لوران تابع $f(z)=\frac{1}{z(z-5)}$ در ناحیه‌ی $2<|z-1|<3$ برابر است با:

الف. صفر
ب. $\frac{1}{2}$
ج. $\frac{1}{8}$
د. $-\frac{1}{5}$

۱۵. اگر سری فوریه تابع $f(x)=\begin{cases}-k & -\pi<x<0\\ k & 0<x<\pi\end{cases}$ برای فاصله‌ی $(-\pi,\pi)$ با شرط $f(x+2\pi)=f(x)$ برابر با $\frac{4k}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(2n+1)}{2n+1}$ باشد، آن گاه مقدار سری $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots$ برابر است با:

الف. $\frac{\pi}{2}$
ب. π
ج. $\frac{\pi}{4}$
د. $\frac{\pi}{8}$

۱۶. سری فوریه نمایی تابع متناوب زیر کدام است؟

$$f(x) = x, -\pi < x < \pi \ , f(x+2\pi) = f(x)$$

الف. $\sum_{-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n i e^{inx}}{n}$ ب. $\sum_{-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n i e^{inx}}{n^2}$

ج. $\sum_{-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n e^{inx}}{n^2}$ د. $\sum_{-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n e^{inx}}{n}$

۱۷. انتگرال فوریه تابع $f(x) = \begin{cases} 1 & |x| < 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases}$ کدام است؟

الف. $\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos wx \sin w}{w} dw$ ب. $\frac{\pi}{2} \int_0^{\infty} \frac{\sin wx \cos w}{w} dw$

ج. $\frac{\pi}{2} \int_0^{\infty} \frac{\cos wx \sin w}{w} dw$ د. $\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin wx \cos w}{w} dw$

۱۸. تبدیل فوریه کسینوسی تابع $f(x) = \begin{cases} k & 0 < x < a \\ 0 & x > a \end{cases}$ کدام است؟

الف. $\sqrt{\frac{2}{\pi}} k \left(\frac{\sin aw}{w}\right)$ ب. $\sqrt{\frac{2}{\pi}} k \left[\frac{1 - \cos aw}{w}\right]$

ج. $\frac{k(1 - e^{-iwa})}{iw\sqrt{2\pi}}$ د. $\frac{k(1 - e^{iwa})}{iw\sqrt{2\pi}}$

۱۹. برای معادله‌ی دیفرانسیل با مشتقات جزیی $e^{2x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2x e^{x+y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + e^{2y} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ کدام گزینه درست است؟

الف. به ازای هر y, x از نوع هذلولیگون است

ب. به ازای $y = 1$ از نوع سهمیگون است

ج. به ازای $x = y$ از نوع هذلولیگون است

د. به ازای هر x که $-1 < x < 1$ از نوع بیضیگون است

۲۰. کدام یک از معادلات زیر ، معادله‌ی پخش گرما در حالت دو بعدی است؟

الف. $u_{xx} = u_{yy} + 1$ ب. $3u_t - 2u_{xx} = u_{yy}$

ج. $u_t = u_{xx} + u_{yy}$ د. $u_t = u_{xx} - u_{yy}$

نام درس: ریاضیات مهندسی

رشته تحصیلی/ کُد درس: مهندسی کامپیوتر (۱۱۱۱۰۹۵)

کُد سری سؤال: یک (۱)

تعداد سؤالات: تستی: ۲۰ **تشریحی:** ۵

زمان آزمون (دقیقه): تستی: ۶۰ **تشریحی:** ۶۰

استفاده از: -- **مجاز است.**

سؤالات تشریحی(بارم هر سؤال ۲ نمره)

۱. تبدیل دو خطی‌ای را بیابید که نقاط $z_1=\infty$, $z_2=i$, $z_3=0$ را به روی نقاط $w_1=0$, $w_2=i$ و $w_3=\infty$ می‌نگارد.

۲. حاصل انتگرال $\oint_C (z-z_0)^m\,dz$ را که در آن m عددی صحیح ، z_0 عددی مختلط و C دایره‌ای به مرکز z_0 و شعاع r است، بیابید.

۳. حاصل انتگرال $\int_0^{\pi}\dfrac{\sin^2\theta}{5-4\cos\theta}\,d\theta$ را با استفاده از مانده‌ها بیابید.

٤. تابع $f(x)=\dfrac{x^2}{4},\ -\pi<x<\pi$ با دوره تناوب 2π را در نظر بگیرید.

الف. سری فوریه‌ی f را بنویسید. (در صورت امکان از زوج و فرد بودن f استفاده کنید.)

ب. با استفاده از آن نشان دهید: $1+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{16}+\ldots=\dfrac{\pi^2}{6}$

۵. معادله‌ی دیفرانسیل با مشتقات جزیی زیر را تحت شرایط داده شده حل کنید.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\ ,\quad 0<x<1\ ,\quad t>0$$

$$u(0,t)=u(1,t)=u_t(x,0)=0$$

$$u(x,0)=3\sin\pi x-4\sin 5\pi x$$

مرکز آزمون
کلید سئوالات تشریحی (محرمانه)

نام درس: ریاضیات مهندسی .... صفحه: ۱ از ۲

کد درس: ۱۱۱۱۰۹۸

رشته تحصیلی-گرایش: کامپیوتر نرم افزار و سخت افزار (پیوسته و تجمیع)

مقطع: کارشناسی .... سال تحصیلی: ۹۰-۸۹ نیمسال: اول ⊗ دوم ○ ترم تابستان ○ تاریخ آزمون: ۸۹/۱۰/۲۸ بارم: هر سؤال ۲ نمره

۱) صفحه ۱۳۱ کتاب درسی طبق قضیه ۲ صفحه ۱۳۰

$$\frac{(w-0)(i-w_2)}{(w-w_2)(i-0)} = \frac{(z-z_1)(i-0)}{(z-0)(i-z_1)}$$

صورت و مخرج طرفین تساوی فوق را به ترتیب بر z_1 و w_2 تقسیم می‌کنیم

$$\frac{w\left(\frac{i}{w_2}-1\right)}{\left(\frac{w}{w_2}-1\right)i} = \frac{\left(\frac{z}{z_1}-1\right)i}{z\left(\frac{i}{z_1}-1\right)}$$

وقتی $z_1\to\infty$ و $w_2\to\infty$ را لطی $w=-\frac{1}{z}$ بدست می‌آید

۲)

$$z(t)=z_0+r(\cos t+i\sin t)=z_0+re^{it},\quad 0\le t\le 2\pi$$

$$(z-z_0)^m=r^m e^{imt}\qquad dz=ire^{it}dt$$

$$\Rightarrow \oint_C (z-z_0)^m dz=\int_0^{2\pi} r^m e^{imt}\, ire^{it}dz = ir^{m+1}\int_0^{2\pi} e^{i(m+1)t}dt$$

$$= ir^{m+1}\left[\int_0^{2\pi}\cos(m+1)t\,dt + i\int_0^{2\pi}\sin(m+1)t\,dt\right]$$

$$=\begin{cases}2\pi i & m=-1\\ 0 & m\ne -1 \text{ صحیح}\end{cases}$$

صفحه ۱۰۵ کتاب درسی

۳) $\sin\theta=\frac{z^2-1}{2i}$ و $\cos\theta=\frac{z^2+1}{2z}$ ، $d\theta=\frac{dz}{iz}$. با تغییر متغیر $\theta\to 2\pi-\theta$ داریم

$$\int_0^\pi \frac{\sin^2\theta\, d\theta}{5-4\cos\theta}=\int_\pi^{2\pi}\frac{\sin^2\theta}{5-4\cos\theta}d\theta \Rightarrow \int_0^\pi\frac{\sin^2\theta}{5-4\cos\theta}d\theta=\frac12\int_0^{2\pi}\frac{\sin^2\theta}{5-4\cos\theta}d\theta=\frac{-i}{8}\oint_C\frac{(z^4-2z^2+1)dz}{z^2(2z-1)(z-2)}$$

تابع زیر انتگرال قطب های ساده در $z=\frac12$ و $z=2$ و قطب دوگانه در $z=0$ دارد که $z=2$ خارج دایره $|z|=1$ واقع است. $Res(\frac12)=-\frac34$ ، $R(0)=\lim_{z\to0}\frac{z^4-2z^2+1}{2z^2-5z+2}=\frac54$ لذا مقدار انتگرال برابر است با:

$$-\frac{i}{8}\left(\frac54-\frac34\right)(2\pi i)=\frac{\pi}{8}$$

مرکز آزمون
کلید سئوالات تشریحی (محرمانه)

نام درس: ریاضیات گسسته مهندسی — صفحه: ۲ از
کد درس: ۱۱۱۱۰۹۵
رشته تحصیلی ـ گرایش: کامپیوتر نرم افزار و سخت افزار ... ناپیوسته
مقطع: کارشناسی — سال تحصیلی: ۹۰-۸۹ — نیمسال: اول ● دوم ○ ترم تابستان ○ — تاریخ آزمون: ۸۹/۱۰/۲۹ — بارم: هر سوال ۲ نمره — نمره

۴) $f(x)=\frac{x^2}{4}$, $-\pi<x<\pi$

f تابعی زوج است پس سری فوریه کسینوسی داریم

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{x^2}{4}dx=\frac{\pi^2}{12}$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{x^2}{4}\cos\frac{n\pi x}{\pi}dx=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}x^2\cos nx\,dx=\frac{1}{n^2}\cos n\pi=\begin{cases}\frac{1}{n^2} & n \text{ زوج}\\ -\frac{1}{n^2} & n \text{ فرد}\end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{\pi^2}{12}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos nx}{n^2}$$

سری فوریه مورد نظر برابر است با:

$$f(\pi)=\frac{\pi^2}{4}=\frac{\pi^2}{12}+\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\cdots\right)\Rightarrow 1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}$$

۵) صفحه ۱۹۹ کتاب درسی: جواب به صورت $u=XT$ در نظر می‌گیریم و با جایگذاری در معادله داریم $XT''=c^2X''T$ که در نتیجه داریم

$$\frac{T''}{c^2T}=\frac{X''}{X}=-\lambda^2\Rightarrow X''+\lambda^2X=0,\ T''+c^2\lambda^2T=0$$

با حل این معادلات حاصل داریم

$$X=A_1\cos\lambda x+B_1\sin\lambda x,\quad T=A_2\cos c\lambda t+B_2\sin c\lambda t$$

با توجه به شرایط داده شده داریم

$$u(0,t)=0\Rightarrow 0=A_1(A_2\cos c\lambda t+B_2\sin c\lambda t)\Rightarrow A_1=0$$

حال با فرض $A=A_2B_1$ و $B=B_2B_1$ جواب به صورت زیر در می‌آید

$$u=(A\cos c\lambda t+B\sin c\lambda t)\sin\lambda x$$

از شرط $u_t(x,0)=0$ داریم $B=0$ لذا

$$u=A\cos c\lambda t\sin\lambda x$$

با استفاده از آخرین شرط باید معادله ای به صورت زیر داشته باشیم

$$a_1\sin n_1\pi x+a_2\sin n_2\pi x=3\sin\pi x-4\sin5\pi x$$

با مقایسه طرفین رابطه فوق داریم $a_1=3$ و $n_1=1$, $a_2=-4$ و $n_2=5$ پس جواب به صورت زیر است

$$u=3\sin\pi x\cos c\pi t-4\sin5\pi x\cos c\pi t$$

ریاضی مهندسی ترم اول ۹۰_۸۹	
1	د
2	ب
3	الف
4	د
5	ب
6	د
7	ج
8	الف
9	ب
10	الف
11	ب
12	ج
13	ج
14	د
15	ج
16	الف
17	الف
18	الف
19	د
20	ج